

Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria industriale
Corso di laurea in Ingegneria meccanica
Anno accademico 2008-09

Insegnamento di Costruzione di Macchine I
(Prof. M. Giglio, M. Gobbi, S. Miccoli, M. Sangirardi)

Esercizio n° 5

Esercitazione n° 3 – Analisi cinematica

Effettuare l'analisi cinematica della struttura in Figura 1 e successivamente determinare le reazioni vincolari.

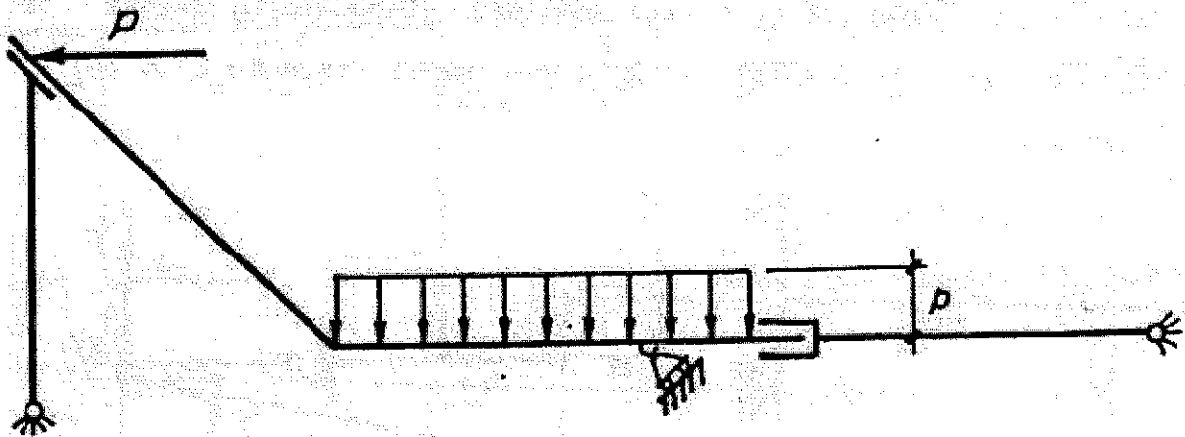


Figura 1

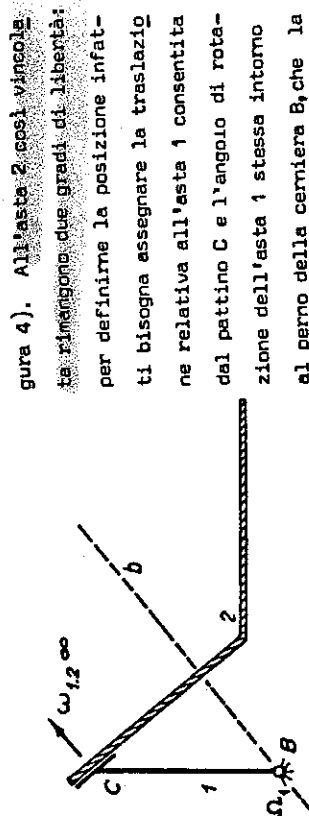


Figura 4

serva che anche il carrello A, vincolo semplice, lasciava all'asta due gradi di libertà, si può prevedere che la condizione imposta al centro di istantanea rotazione dell'asta 2 dal vincolo costituito dall'asta 1 sarà simile a quella imposta dal carrello A; anche in questo caso il centro di istantanea rotazione dell'asta 2 sarà un punto qualunque di una retta.

Come si è detto l'asta 2 può traslare rispetto all'asta 1, pensata fissa, nella direzione del piano di scorrimento del pattino C, ciò equivale ad una "rotazione" attorno ad un centro di istantanea rotazione all'infinito ω_{12} nella direzione normale al piano di scorrimento del pattino. L'asta 1, a sua volta, può ruotare intorno al perno della cerniera B e quindi il suo centro di istantanea rotazione assoluto Ω_1 coincide col perno della cerniera stessa. Si osservi che, agli effetti del moto dell'asta 2, le rotazioni intorno ai due centri ω_{12} e Ω_1 sono indipendenti e pertanto il più generale atto di moto consentito all'asta 2 è una combinazione di tali rotazioni; ne segue che il centro di istantanea rotazione dell'asta 2 può essere un punto qualsiasi della retta b congiungente Ω_1 con ω_{12} .

Si consideri infine (figura 5) l'effetto dell'asta 3. Si riconosce che dal punto di vista cinematico l'asta 3 è equivalente all'asta 1. Infatti l'asta 2, vincolata come in figura 5, ha due gradi di libertà ed anche in questo caso esiste un centro di istantanea rotazione

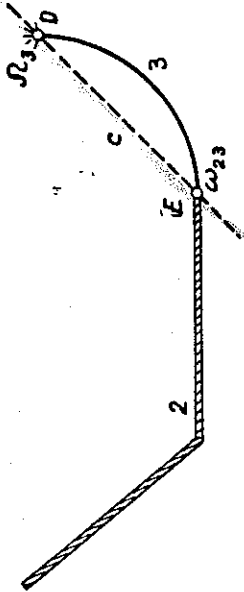


figura 5

ne relativo ω_{23} dell'asta 2 rispetto alla 3 (questa volta al finito; nel perno della cerniera E) ed uno assoluto Ω_3 nel perno della cerniera D. Le rotazioni intorno ad ω_{23} e ad Ω_3 possono avvenire indipendentemente; pertanto il centro di istantanea rotazione assoluto Ω_2 della asta 2 deve stare sulla congiungente di Ω_3 con ω_{23} e cioè sulla retta c passante per i perni delle cerniere D ed E. Concludendo si può osservare (figura 6) che il centro di istantanea rotazione dell'asta 2, se esistesse, dovrebbe appartenere contemporaneamente alle rette a, b, c perché siano rispettate tutte le condizioni fin qui messe in luce; è chiaro che non esiste nessun punto del piano che soddisfi a questa condizione perché le tre rette non s'incontrano in un unico punto e quindi il centro di istantanea rotazione Ω_2 non esiste. E' facile constatare a questo punto che nemmeno Ω_1 ed Ω_3 possono esistere. Si consideri ad esempio il caso di Ω_3 : l'asta 3 è vincolata all'asta 2, che è fissa visto che non esiste il suo centro di istantanea rotazione, tramite la cerniera E; dunque il perno di E dovrebbe essere il centro di istantanea rotazione Ω_3 dell'asta 3, ma Ω_3 deve anche coincidere con il perno della cerniera D e le due condizioni quindi si escludono*. Analogamente vale per l'asta 1.

Dalla figura 6 si trae spunto per la seguente osservazione:

* Sarebbe un errore grossolano concludere dicendo che l'asta 3 può ruotare intorno ad un punto qualsiasi della retta D-E (perché?).

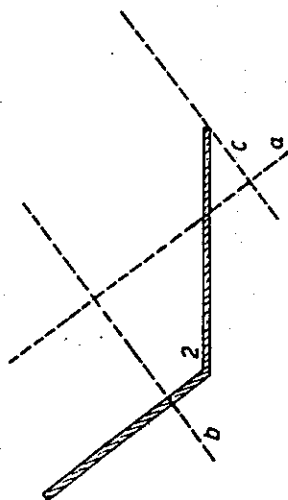


figura 6

dal punto di vista cinematico l'asta 2 è come se fosse vincolata al sistema di riferimento con tre carrelli aventi come normali ai rispettivi piani di scorrimento le tre rette a , b e c passanti per i perni delle cerniere. Non stupisce quindi che la condizione di labilità coincida con quella ben nota dell'asta vincolata con tre carrelli.

b) l'esercizio è stato svolto prendendo in considerazione l'asta 2 ed esaminando le condizioni che i vincoli impongono all'esistenza del suo centro di istantanea rotazione. La scelta di tale asta è del tutto arbitraria: si poteva infatti fissare l'attenzione su un'altra asta, ad esempio la 1 (figura 7). L'asta 1 è collegata direttamente al sistema di riferimento dalla cerniera B e pertanto il suo centro di istantanea rotazione se esiste, non può che coincidere con il perno della cerniera B.

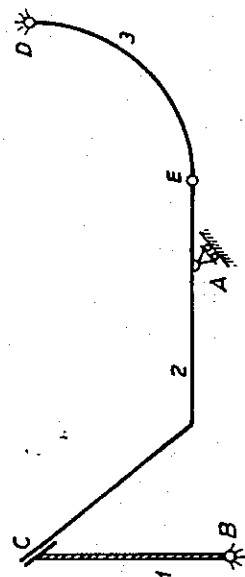


figura 7

Inoltre essa è collegata al riferimento indirettamente tramite l'asta 2 e tutti i vincoli che a questa ultima fanno capo (carrello A e asta 3). Per analizzare quali libertà di movimento derivino all'asta 1 a causa di detti collegamenti, occorre in via preliminare individuare quali possibilità di movimento siano consentite all'asta 2 dall'asta 3 e dal carrello A. Si possono sfruttare a questo punto i risultati dell'analisi precedente: si è visto infatti (figura 8) che il centro di istantanea rotazione Ω_2 dell'asta 2 per effetto di detti vincoli deve appartenere alle rette a e c e pertanto è il punto di incontro F di tali rette; cioè, per quanto riguarda uno spostamento rigido infinitesimale, è come se l'asta 2 fosse vincolata al riferimento da una cerniera con perno in F.

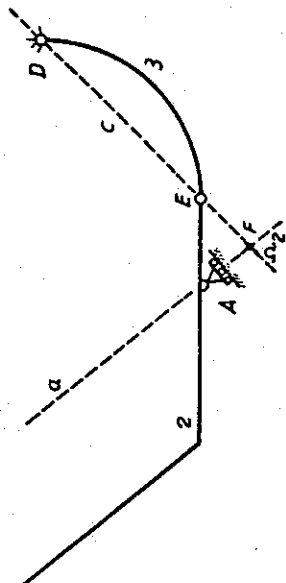


figura 8

Le aste 1 e 2 possono quindi essere pensate costituenti un arco a tre cerniere: le due cerniere a terra sono la cerniera reale B e quella ideale F, mentre quella intermedia è costituita dal pattino C. I perni delle tre cerniere, due al finito ed uno all'infinito, non sono allineati su una retta, dato

che la congiungente delle cerniere F e B non passa per ω_{1200} ; la struttura non è labile (figura 9).

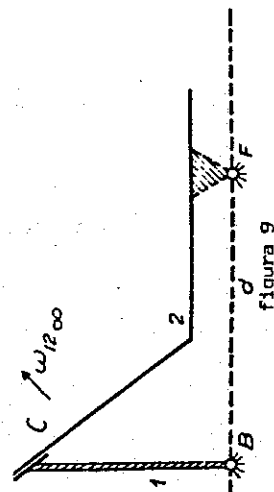


figura 9

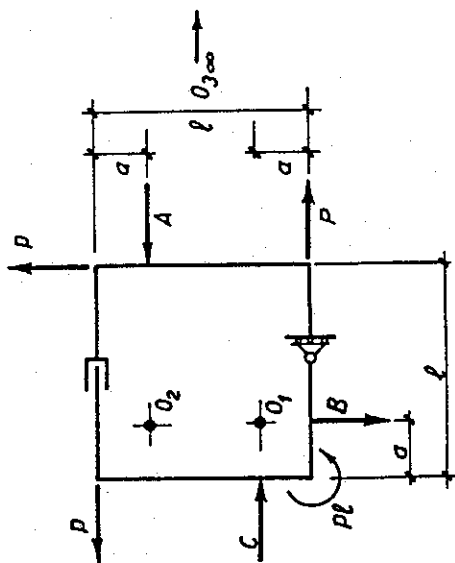


Figura 4

gnita, dato che i punti O_1, O_2 ed O_{300} sono le intersezioni delle rette d'azione delle reazioni.

Equazione di equilibrio intorno al polo O_1 (non compaiono le incognite

B e C che hanno braccio nullo):

$$p(1+p(1-a)) + pa + p(1-a) + A(1-2a) = 0,$$

da cui:

$$P(31-a) + A(1-2a) = 0,$$

$$A = -P \frac{3 - a/l}{1 - 2a/l} \cdot$$

Equazione di equilibrio intorno al polo O, ossia equazione di equilibrio alla traslazione in direzione verticale (non compaiono A e C perché orizzontali):

0-2-0

da cui:

$\theta = p$

c) Il problema può essere risolto anche con i metodi della statica grafica. A tale fine occorre anzitutto trovare il risultante dei carichi

esterni: i carichi esterni sono costituiti dalla forza verticale P di retta verso l'alto e da una coppia antioraria di momento $2Pl$; il risultante R di questo sistema di carichi è una forza di modulo P , avente retta d'azione verticale traslata di $2l$ verso destra rispetto alla retta d (figura 5).

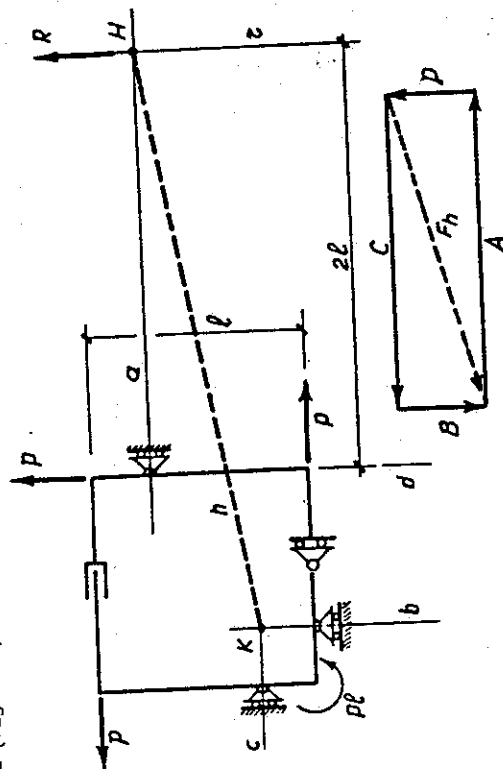


figura 5

Si tratta di determinare tre forze (le reazioni A, B e C) aventi rette d'azione a, b e c che costituiscano sistema equilibrante della forza R. Per far ciò si può equilibrare la R con una forza avente retta d'azione a (la reazione A) ed una forza F_h avente retta d'azione h, congiungente il punto H (intersezione di r ed a) con il punto K (intersezione di b e c). Si determinano le reazioni B e C scomponendo la forza F_h secondo le direzioni b e c (figura 5).

Esempio 2

La travatura rappresentata in figura 6 non è labile, come si è visto nel capitolo precedente. Le reazioni vincolari (figura 7) de-

vono assicurare l'equilibrio della travatura nel suo complesso ed inoltre garantire l'equilibrio delle varie aste che la compongono.

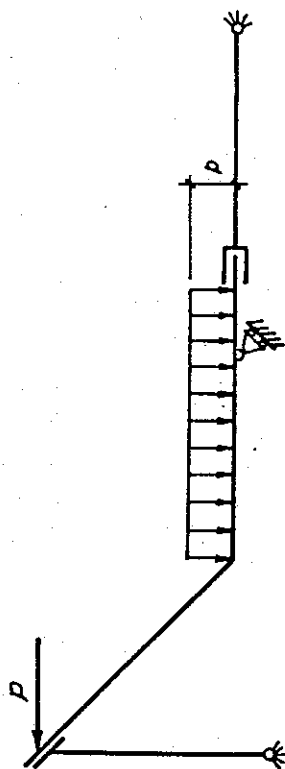


figura 6

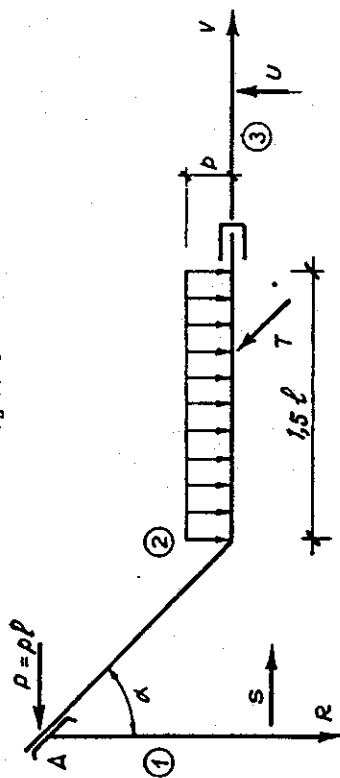


figura 7

Si possono iniziare i calcoli imponendo che l'asta 1 non trasli rispetto alla 2 nella direzione del piano di scorrimento del pattino A; si ottiene:

$$R \cos \alpha + S \sin \alpha = 0,$$

cioè la risultante W delle forze R ed S deve essere diretta normalmente al piano di scorrimento del pattino A e può essere assunta come unica incognita in luogo di R ed S (figura 8). Si osserva inoltre che l'asta 3 può scorrere orizzontalmente rispetto all'asta 2; perché tale scorrimento non abbia luogo la forza V deve essere nulla.

A questo punto (figura 9) la travatura può essere considerata come un

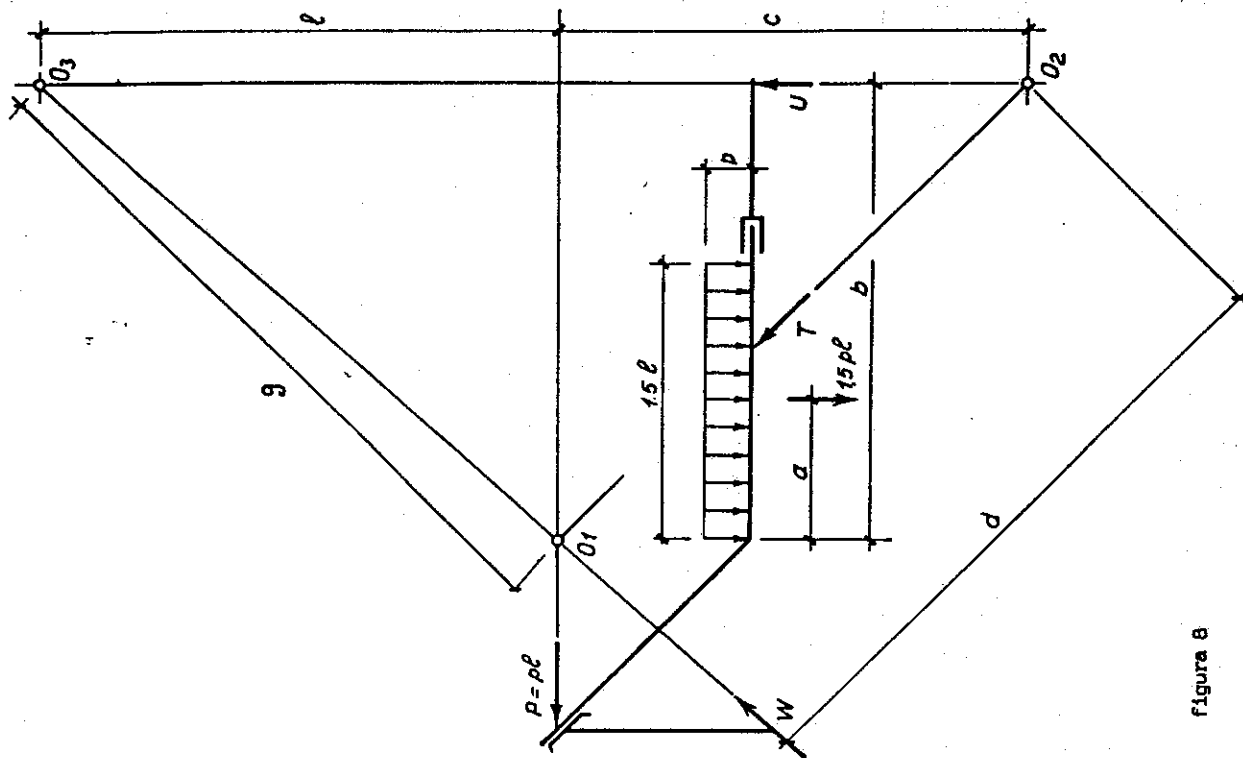


figura 8

unico corpo rigido. Le reazioni incognite W , T ed U possono essere calcolate scrivendo che il momento di tutte le forze agenti sulla struttura rispetto ai punti O_1 , O_2 ed O_3 è nullo. A tal fine il carico distribuito può essere sostituito dal suo risultante (figura 8).

L'equazione di equilibrio intorno ad O_1 assume la forma:

$$1,5pl a - U \cdot b = 0$$

L'equazione di equilibrio intorno ad O_2 risulta invece:

$$1,5pl(b-a) + pl \cdot c - W \cdot d = 0$$

L'equazione di equilibrio intorno ad O_3 diventa:

$$1,5pl(b-a) - pl \cdot e - T \cdot g = 0$$

Da cui:

$$U = pl \frac{1,5a}{b} ; W = pl \frac{1,5b+c-1,5a}{d} ; T = pl \frac{1,5b-1,5a-e}{g}$$

Come si riconosce facilmente le reazioni risultano positive e quindi hanno i versi indicati in figura.

Una volta soddisfatte le prime due condizioni di equilibrio il calcolo delle reazioni T , U e W può essere effettuato per via grafica: determinato il risultante della forza orizzontale P e del carico uniformemente distribuito, si tratta di trovare le forze T , U e W di assegnate rette d'azione, che fanno equilibrio a tale risultante. Tali operazioni si effettuano con un procedimento analogo a quello visto nell'esempio precedente; si lascia al lettore lo sviluppo dei dettagli.

Esempio 3

In questo esempio si studia la travatura dell'esempio 2 in una differente condizione di carico (figura 9).

Nella figura 10 sono messe in evidenza le componenti di reazione non nulle (la componente orizzontale della reazione della cerniera A è nulla). Si può iniziare lo studio, ad esempio, imponendo la condizione di equilibrio dell'asta 1 allo scorrimento nella direzione del pattino. A tal fine la risultante di tutte le forze applicate all'asta 1, il carico di

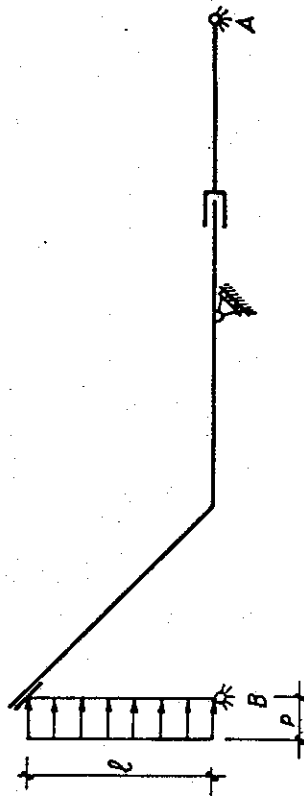


figura 9

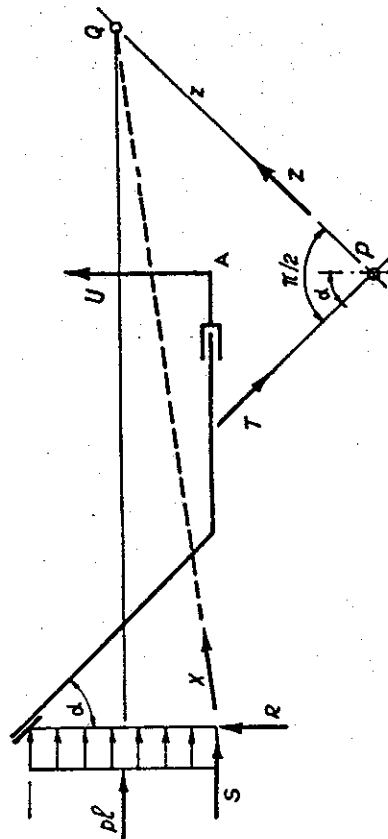


figura 10

struito e le reazioni R ed S , deve avere componente nulla nella direzione del piano di scorrimento del pattino:

$$(pl + S) \sin \alpha - R \cos \alpha = 0$$

Alternativamente si può imporre analogo condizione per le forze agenti

sul resto della travatura (cioè il complesso delle aste 2 e 3). Si ha:

$$T - U \cos \alpha = 0$$

Le due condizioni sono del tutto equivalenti. In particolare la seconda stabilisce un legame diretto tra le reazioni T ed U , che impone al loro risultante Z di avere come retta d'azione la z , perpendicolare per P al piano di scorrimento del pattino (figura 10).

A questo punto è ovvia sia la soluzione analitica sia la soluzione grafica. Il risultante dei carichi distribuiti e la forza Z hanno rette d'azione passanti per Q , ne segue che anche la reazione X della cerniera B (risultante di R ed S) deve passare per tale punto, e ciò perché sia nullo il momento rispetto a Q di tutte le forze agenti sulla travatura. Nella figura 10 è riportato il calcolo grafico delle reazioni: si determinano le equilibranti X e Z della risultante dei carichi pl : si scompongono poi queste nelle rispettive componenti: la Z in U e T , la X in R ed S .

La determinazione analitica è lasciata al lettore come esercizio.

Esempio 4

La travatura della figura 11 non è labile: si lascia al lettore la verifica.

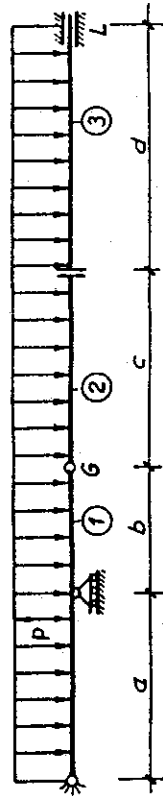


figura 11

Nella figura 12 sono messe in evidenza le componenti di reazione: le componenti incognite sono cinque e pertanto, oltre alle tre equazioni della statica del corpo rigido, sono necessarie due equazioni di equilibrio che derivano dalla presenza della cerniera e del pattino interni-di.

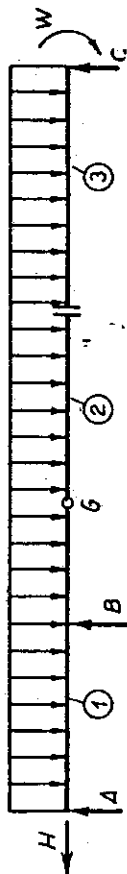


figura 12

Con questo esempio è possibile mostrare come una scelta attenta dell'ordine con cui si scrivono le equazioni può semplificare i calcoli.

a) Si determinino le reazioni, in primo tempo, scrivendo le equazioni cardinali e successivamente quelle corrispondenti agli svincoli interni. La condizione di equilibrio in direzione orizzontale comporta:

$$H = 0$$

per l'equilibrio in direzione verticale si ha:

$$A + B + C - p(a + b + c + d) = 0$$

l'equilibrio dei momenti intorno alla cerniera di sinistra comporta:

$$B \cdot a + C(a + b + c + d) - w \cdot 0,5p(a + b + c + d)^2 = 0$$

affinché l'asta 1 non ruoti attorno alla cerniera G deve essere nullo il momento dei carichi che agiscono sulla medesima asta 1 rispetto a G , ossia:

$$A \cdot (a + b) + B \cdot b - 0,5p(a + b)^2 = 0$$

infine, per l'equilibrio alla traslazione in direzione verticale delle aste 1 e 2 rispetto all'asta 3, si ha:

$$A + B - p(a + b + c) = 0$$

Le cinque equazioni ora scritte rappresentano il sistema risolvente; è evidente che la soluzione è abbastanza laboriosa.

b) Si può operare, in alternativa, nel modo seguente che trae spunto dall'analisi cinematica del sistema. La struttura è composta da un arco a tre cerniere, formato dalle aste 2 e 3, impostato sulla trave appoggiata 1 e sul manico L (figura 11). È opportuno cercare dapprima le reazioni dell'arco a tre cerniere che dipendono solo dai carichi * Si noti che interviene soltanto quella parte del carico distribuito che agisce direttamente sull'asta 1.